



REMARQUES

SUR UN BEAU RAPPORT ENTRE LES SÉRIES
DES PUISSANCES TANT DIRECTES QUE
RÉCIPROQUES.

PAR M. L. EULER *).

Le rapport, que je me propose de développer ici, regarde les
sommes de ces deux séries infinies générales :

$$\odot - 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \&c.$$

$$\oslash - \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \&c.$$

dont la première contient toutes les puissances positives ou directes des nombres naturels, d'un exposant quelconque m , & l'autre les puissances négatives ou réciproques des mêmes nombres naturels, d'un exposant aussi quelconque n , en faisant varier alternativement les signes des termes de l'une & de l'autre série. Mon but principal est donc de faire voir, que, quoique ces deux séries soient d'une nature tout à fait différente, leurs sommes se trouvent pourtant dans un très beau rapport entr'elles; de sorte que, si l'on étoit en état d'assigner en général la somme de l'une de ces deux especes, on en pourroit déduire la somme

*) Lu en 1749.



de l'autre espece. Ou bien je ferai voir, qu'en connoissant la somme de la première série pour un exposant quelconque m , on en peut toujours déterminer la somme de l'autre série pour l'exposant $n = m + 1$. Cette remarque me paroît d'autant plus importante, qu'elle n'est encore fondée que sur une induction, mais que je porterai à un tel degré de certitude, qu'on la pourra regarder comme très rigoureusement démontrée.

2. Pour les séries de la première espece, puisque leurs termes deviennent de plus en plus grands, il est bien vrai qu'on ne sauroit se former une juste idée de leur somme, tandisqu'on entend par somme une telle valeur, de laquelle on approche d'autant plus, plus on rassemble de termes de la série actuellement. Ainsi, quand on dit que la somme de cette série $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$ &c. est $\frac{1}{4}$, cela doit paroître bien paradoxé, puisqu'en rassemblant 100 termes de cette série, on trouve -50 : or la somme de 101 termes donne $+51$, lesquelles valeurs sont bien différentes de $\frac{1}{4}$, & le deviennent encore beaucoup plus, quand on multiplie le nombre des termes. Mais j'ai déjà remarqué dans une autre occasion, qu'il faut donner au mot de *somme* une signification plus étendue, & entendre par là une fraction, ou autre expression analytique, laquelle étant développée selon les principes de l'analyse produise la même série dont on cherche la somme. Après avoir établi cette signification, il n'est plus douteux que la somme de cette série $1 - 2 + 3 - 4 +$ &c. soit $= \frac{1}{4}$, puisqu'elle nait de l'évolution de cette formule $\frac{1}{(1+x)^2}$, dont la valeur est incontestablement $\frac{1}{4}$. La chose deviendra plus claire en considérant cette série plus générale:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \&c.$$

qui résulte en développant cette formule $\frac{1}{(1+x)^2}$, à laquelle donc cette série est effectivement égale, & partant aussi dans le cas où $x = 1$.

3. On



3. On comprend aisément que le calcul différentiel nous fournit un moyen fort aisé de trouver les sommes de ces sortes de séries; & on en tire les formations suivantes:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \&c. = \frac{1}{1+x}$$

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \&c. = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + \&c. = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

$$1 - 2^3x + 3^3x^2 - 4^3x^3 + \&c. = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4}$$

$$1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \&c. = \frac{1-11x+11xx-x^3}{(1+x)^5}$$

$$1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \&c. = \frac{1-26x+66xx-26x^3+x^4}{(1+x)^6}$$

$$1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3 + \&c. = \frac{1-57x+302xx-302x^3+57x^4-x^5}{(1+x)^7}$$

d'où l'on tire pour les séries de notre première espèce, en prenant $x = 1$, les sommes suivantes:

$$1 - 2^0 + 3^0 - 4^0 + 5^0 - 6^0 + \&c. = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c. = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c. = 0$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c. = -\frac{1}{15}$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c. = 0$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \&c. = +\frac{1}{64}$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \&c. = 0$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \&c. = -\frac{272}{15}$$

$$1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \&c. = 0$$

$$1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \&c. = +\frac{7031}{16} \&c.$$



4. Des séries de l'autre espece on n'a connu autrefois que celle du cas $n = 1$, ou de celle-ci

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

dont la somme est $\frac{1}{2}$, jusques à ce que j'ai trouvé la somme de la série réciproque des quarrés, & ensuite de toutes les autres puissances paires: ayant démontré que les sommes de toutes ces séries dépendent du rapport de la circonférence d'un cercle π à son diametre 1.

Car supposant les sommes de ces séries	j'ai trouvé
$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = A\pi^2$	$A = \frac{1}{6}$,
$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = B\pi^4$	$B = \frac{1}{90} A^2$,
$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots = C\pi^6$	$C = \frac{1}{1260} AB$,
$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots = D\pi^8$	$D = \frac{1}{15120} AC + \frac{1}{1080} B^2$,
$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \dots = E\pi^{10}$	$E = \frac{1}{1814400} AD + \frac{1}{129600} BC$,
\dots	\dots

d'où je conclus pour les séries de notre seconde espece, en faisant varier alternativement les signes

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{2^1 - 1}{2^1} A\pi^2$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \dots = \frac{2^3 - 1}{2^3} B\pi^4$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \dots = \frac{2^5 - 1}{2^5} C\pi^6$$



$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \&c. = \frac{2^7 - 1}{2^7} D \pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \&c. = \frac{2^9 - 1}{2^9} E \pi^{10}$$

$$1 - \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} - \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} - \frac{1}{6^{12}} + \&c. = \frac{2^{11} - 1}{2^{11}} F \pi^{12},$$

&c.

Or, pour les cas où n est un nombre impair, toutes mes recherches pour en trouver les sommes, ont été inutiles jusques ici. Cependant il est certain qu'elles ne dépendent point d'une manière semblable des puissances pareilles du nombre π . Peut-être que les réflexions suivantes y répandront quelque jour.

5. Puisque les nombres A, B, C, D, &c. sont de la dernière importance dans ce sujet, je les mettrai ici aussi loin, que je les ai calculés.

$$A = \frac{2^0 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$B = \frac{2^2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots 5 \cdot 3},$$

$$C = \frac{2^4 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots 7 \cdot 3},$$

$$D = \frac{2^6 \cdot 3}{1 \cdot 2 \dots 9 \cdot 5},$$

$$E = \frac{2^8 \cdot 5}{1 \cdot 2 \dots 11 \cdot 3},$$

$$F = \frac{2^{10} \cdot 691}{1 \cdot 2 \dots 13 \cdot 105},$$

$$G = \frac{2^{12} \cdot 35}{1 \cdot 2 \dots 15 \cdot 1},$$

$$H =$$



$$H = \frac{2^{14} \cdot 3617}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 15'}$$

$$I = \frac{2^{16} \cdot 43867}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 19 \cdot 21'}$$

$$K = \frac{2^{18} \cdot 1222277}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 21 \cdot 55'}$$

$$L = \frac{2^{20} \cdot 854513}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 23 \cdot 3'}$$

$$M = \frac{2^{22} \cdot 1181820455}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 25 \cdot 273'}$$

$$N = \frac{2^{24} \cdot 76977927}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 27 \cdot 1'}$$

$$O = \frac{2^{26} \cdot 23749461029}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 15'}$$

$$P = \frac{2^{28} \cdot 8615841276005}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 31 \cdot 231'}$$

$$Q = \frac{2^{30} \cdot 84802531453387}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 33 \cdot 85'}$$

$$R = \frac{2^{32} \cdot 90219075042845}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 35 \cdot 3'}$$

6. Or c'est aussi de ces mêmes nombres A, B, C, D, &c. que dépend la formation des séries de la première espèce \odot dans les cas, où l'exposant m est un nombre impair, ayant déjà vu que, lorsque cet exposant est un nombre pair, la somme devient égale à zéro. Mais il faut employer une méthode toute particulière pour démontrer cette harmonie. Pour cet effet, il faut recourir à la méthode générale que j'ai donnée autrefois pour déterminer les sommes des séries



séries par leurs termes généraux. Soit donc X une fonction quelconque de x , représentée en sorte $X = f: x$, & considérons cette série continuée à l'infini

$$f: x + f: (x + \alpha) + f: (x + 2\alpha) + f: (x + 3\alpha) + f: (x + 4\alpha) + \&c.$$

dont les termes suivans soyent de semblables fonctions de $x + \alpha$, $x + 2\alpha$, $x + 3\alpha$, &c. & posons la somme de cette série $= S$, qui étant aussi une fonction de x , si l'on y met $x + \alpha$ au lieu de x , d'où elle devient

$$S + \frac{\alpha dS}{1 dx} + \frac{\alpha^2 ddS}{1.2 dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3S}{1.2.3 dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4S}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

cette expression sera la somme de la série

$$f: (x + \alpha) + f: (x + 2\alpha) + f: (x + 3\alpha) + f: (x + 4\alpha) + \&c.$$

& partant égale à $S - f: x = S - X$, de sorte que

$$-X = \frac{\alpha dS}{1 dx} + \frac{\alpha^2 ddS}{1.2 dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3S}{1.2.3 dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4S}{1.2.3.4 dx^4} + \&c.$$

Or de cette équation on trouve par la méthode que j'ai exposée ailleurs

$$S = -\frac{1}{\alpha} \int X dx + \frac{1}{2} X - \frac{\alpha A dX}{2 dx} + \frac{\alpha^3 B d^3X}{2^3 dx^3} - \frac{\alpha^5 C d^5X}{2^5 dx^5} + \&c.$$

où A , B , C , &c. marquent les mêmes nombres que je viens de développer: de sorte que par ce moyen on parvient à la somme cherchée S , tant par la formule intégrale $\int X dx$, que par les différentiels de tout ordre de la fonction X .

7. Maintenant, pour obtenir la variation des signes, au lieu de α écrivons 2α pour avoir cette sommation:

$$f: x + f: (x + 2\alpha) + f: (x + 4\alpha) + \&c. = -\frac{1}{2\alpha} \int X dx + \frac{1}{2} X - \frac{\alpha A dx}{dx} + \frac{\alpha^3 B d^3X}{dx^3} - \frac{\alpha^5 C d^5X}{dx^5} + \&c.$$

du double de laquelle ôtons la série précédente, & nous aurons

$$f: x - f:(x + a) + f:(x + 2a) - f:(x + 3a) + f:(x + 4a) - \&c.$$

$$= \frac{1}{2} X - \frac{(2^2 - 1) a A d X}{2 dx} + \frac{(2^4 - 1) a^3 B d^3 X}{2^3 dx^3} - \frac{(2^6 - 1) a^5 C d^5 X}{2^5 dx^5} + \&c.$$

où le membre, qui renfermoit l'intégrale $\int X dx$, est disparu. Posons maintenant, pour approcher d'avantage de notre but $f: x = X = x^m$; & nous aurons la somme de la série suivante:

$$x^m - (x + a)^m + (x + 2a)^m - (x + 3a)^m + (x + 4a)^m - \&c. =$$

$$\frac{1}{2} x^m - \frac{(2^2 - 1) m a A x^{m-1}}{2} + \frac{(2^4 - 1) m(m-1)(m-2) a^3 B x^{m-3}}{2^3}$$

$$- \frac{(2^6 - 1) m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) a^5 C x^{m-5}}{2^5}$$

$$+ \frac{(2^8 - 1) m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6) a^7 D x^{m-7}}{2^7},$$

&c.

qui ne renfermera qu'un nombre déterminé de termes, toutes les fois que l'exposant m est un nombre entier positif. Donc, posant $a = 1$, nous aurons pour nos séries de la première espèce \odot .

$$x^m - (x + 1)^m + (x + 2)^m - (x + 3)^m + (x + 4)^m - (x + 5)^m + \&c. =$$

$$\frac{1}{2} x^m - \frac{m}{2} (2^2 - 1) A x^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 2 \cdot 2} (2^4 - 1) B x^{m-3}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} (2^6 - 1) C x^{m-5}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} (2^8 - 1) D x^{m-7},$$

&c.



8. A présent nous n'avons qu'à supposer $x = 1$, pour avoir en général la somme de toutes nos séries de la première espèce \odot : mais nous la trouverons encore plus aisément en supposant $x = 0$, d'où nous tirerons la somme de cette série

$$0^m - 1^m + 2^m - 3^m + 4^m - 5^m + 6^m - 7^m + \&c.$$

qui n'est que la négative de celle que nous cherchons. Or, posant $x = 0$, tous les nombres qui composent la somme évanouissent à l'exception d'un seul; où l'exposant de x zéro, ce qui n'arrive que dans les cas où m est un nombre impair; car, quand il est pair, tous les membres $\&$ partant aussi la somme de la série se réduit à rien. Donc, prenant négativement ces sommes, nous trouverons comme il suit.

$m=0$	$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c. = \frac{1}{2}$
$m=1$	$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c. = + 1 \frac{(2^2-1)}{2} A,$
$m=2$	$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c. = 0,$
$m=3$	$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c. = - 1.2.3 \frac{(2^4-1)}{2^3} B,$
$m=4$	$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c. = 0,$
$m=5$	$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \&c. = + 1.2 \dots 5 \frac{(2^6-1)}{2^5} C,$
$m=6$	$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \&c. = 0,$
$m=7$	$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \&c. = - 1.2 \dots 7 \frac{(2^8-1)}{2^7} D,$
$m=8$	$1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \&c. = 0,$
$m=9$	$1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \&c. = + 1.2 \dots 9 \frac{(2^{10}-1)}{2^9} E,$
$m=10$	$1 - 2^{10} + 3^{10} - 4^{10} + 5^{10} - 6^{10} + \&c. = 0,$
	$\&c.$

Quand on développe ces sommes, on les trouve les mêmes que celles que j'ai rapportées ci-dessus §. 3. mais à présent on voit leur liaison avec les lettres A, B, C, &c.

9. Divisons ces séries de la première espèce \odot chacune par celle de la seconde espèce \mathfrak{D} , qui renferme le même nombre de la progression A, B, C, D, &c. pour en tirer les équations suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \&c.} &= + \frac{1(2^2 - 1)}{(2 - 1)\pi^2}, \\ \frac{1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^3} + \&c.} &= 0, \\ \frac{1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \&c.} &= - \frac{1.2.3(2^4 - 1)}{(2^3 - 1)\pi^4}, \\ \frac{1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^5} + \&c.} &= 0, \\ \frac{1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \&c.} &= + \frac{1.2 \dots 5(2^6 - 1)}{(2^5 - 1)\pi^6}, \\ \frac{1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{6^7} + \&c.} &= 0, \\ \frac{1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \&c.} &= - \frac{1.2 \dots 7(2^8 - 1)}{(2^7 - 1)\pi^8}, \end{aligned}$$

$$\frac{1 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{6^8} + \&c.} = 0,$$

$$\frac{1 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \&c.}{1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{6^{10}} + \&c.} = \frac{1 \cdot 2 \dots 9(2^{10} - 1)}{(2^9 - 1)\pi^{10}},$$

&c.

Or l'équation qui précède celles-ci, sera

$$\frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.} = \frac{1}{2/2},$$

dont la liaison avec les suivantes est entièrement cachée.

10. Or la considération de ces équations me conduit à cette formule générale :

$$\frac{1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c.} =$$

$$N. \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) (2^n - 1)}{(2^{n-1} - 1) \pi^n},$$

où tout revient à déterminer justement le coefficient N à l'égard de l'exposant n. Pour cet effet considérons les valeurs de ce coefficient N, qui répondent à chacun des exposans n, que je viens d'examiner :

$$n \mid 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ \&c.$$

$$N \mid \frac{1}{2}, 0, -1, 0, \frac{1}{2}, 0, -1, 0, \frac{1}{2} \ \&c.$$

& puisque toutes les fois que n est un nombre impair, la lettre N doit évanouir, & que pour les cas $n = 4i + 2$, il faut qu'il soit $N = \frac{1}{2}$, mais pour les cas $n = 4i$, il devient $N = -1$, il est évident qu'on satisfait à ces conditions en supposant $N = \frac{1}{2}$

cof. $\frac{n\pi}{2}$. Par cette raison je hazarderai la *conjecture suivante*, que quelque soit l'exposant n , cette équation ait toujours lieu :

$$\frac{1 - 2^{n+1} + 3^{n+1} - 4^{n+1} + 5^{n+1} - 6^{n+1} + \&c.}{1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - 6^n + \&c.} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) (2^n - 1)}{(2^{n+1} - 1) \pi^n} \text{cof. } \frac{n\pi}{2}.$$

Cette conjecture paroîtra sans doute fort hardie, mais puisqu'elle est d'accord avec les cas, où n est un nombre entier positif plus grand que l'unité, je prouverai son accord avec la vérité premièrement pour le cas $n = 1$, & ensuite $n = 0$. Après cela je ferai voir, que si cette conjecture est fondée pour les cas où n est un nombre positif, elle le sera aussi, quand n est un nombre négatif; & enfin je développerai aussi quelques cas, où l'on donne à n une valeur rompue.

II. Soit donc d'abord $n = 1$, pour avoir cette forme

$$\frac{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.}, \text{ dont nous savons}$$

que la valeur est $= \frac{1}{2/2}$; or notre expression donne pour ce cas $1 \cdot 2 \dots (n-1) = 1$, $2^n - 1 = 1$, $\pi^n = \pi$, mais les deux autres parties cof. $\frac{n\pi}{2}$ & $2^{n+1} - 1$, évanouissent l'une & l'autre. C'est pourquoi je représente enforte la valeur, que notre conjecture fournit pour ce cas :

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\text{cof. } \frac{n\pi}{2}}{2^{n+1} - 1},$$

où



où il s'agit de déterminer la valeur de la fraction $\frac{\text{cof. } \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1} - 1}$, dans le cas $n = 1$, où le numérateur & le dénominateur évanouissent. Considérons donc la lettre n comme variable, & puisque le différentiel du numérateur est $-\frac{\pi dn}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$, & celui du dénominateur $= 2^{n-1} dn \ln 2$, notre fraction pour ce cas fera la même que celle-cy $-\frac{\frac{\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1} \ln 2}$, qui posant $n = 1$ se réduit à celle-cy $-\frac{\pi}{2 \ln 2}$, de sorte que la valeur que nous cherchons fera :

$$-\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\text{cof. } \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1} - 1} = + \frac{1}{2 \ln 2},$$

tout comme il est clair de foi-même. Notre conjecture ayant donc aussi lieu par le cas $n = 1$, qui paroït d'abord s'écarter entièrement de la loi des cas suivans, c'est déjà une preuve très forte pour la vérité de cette conjecture; & puisqu'il semble impossible qu'une fautive supposition ait pu soutenir cette épreuve, on pourroit déjà regarder notre conjecture comme très solidement établie: mais je m'en vai apporter encore d'autres preuves également convaincantes.

12. Soit à présent $n = 0$, pour avoir cette forme

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \&c.}{1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \&c.},$$

dont la valeur est évidemment $= 2 \ln 2$. Or notre conjecture, à cause de $\text{cof. } \frac{n\pi}{2} = 1$, $2^{n-1} - 1 = -1$ & $\pi^n = 1$, fournit pour ce cas $+ 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n - 1) (2^n - 1)$, dont le



le facteur $1. 2. 3. \dots (n - 1)$ étant infini, & l'autre $2^n - 1$ évanouissant, on voit déjà que notre conjecture n'est pas contredite par ce cas: mais, pour en prouver aussi le parfait accord, je remarque que puisqu'il y a généralement:

$$1. 2. 3. \dots (n - 1) = \frac{1}{n}. 1. 2. 3. \dots n$$

& que dans le cas $n = 0$, on a $1. 2. 3. \dots n = 1$, nous aurons

pour ce même cas $1. 2. 3. \dots (n - 1) = \frac{1}{n}$, & partant la va-

leur tirée de notre conjecture sera $= \frac{2(2^n - 1)}{n}$, où puisque le

numérateur & le dénominateur évanouissent en posant $n = 0$, on n'a qu'à substituer à leur place leurs différentiels en regardant n comme

une quantité variable, pour avoir une autre fraction $\frac{2 \cdot 2^n dn / 2}{dn} =$

$2 \cdot 2^n / 2$, équivalente à celle-là pour le cas $n = 0$: or celle-cy nous donne ouvertement la même valeur $2/2$, que la nature des séries exige. Voilà donc une nouvelle preuve, qui étant jointe à la précédente pourra bien tenir lieu d'une démonstration complète de notre conjecture. Cependant on n'est que trop autorisé d'en exiger encore une démonstration directe, qui renferme à la fois tous les cas possibles.

13. Notre conjecture étant donc juste pour tous les cas où n est un nombre entier positif, je m'en vai prouver à présent qu'elle est également d'accord avec la vérité, lorsqu'on prend pour n un nombre entier négatif quelconque. Or dans ces cas la valeur de la formule $1. 2. 3. \dots (n - 1)$, devient infinie, ce qui semble troubler la démonstration que j'ai en vüe: mais une observation, que j'ai prouvée ailleurs levera cet obstacle. Prenant ce signe $[\lambda]$, pour marquer ce produit: $1. 2. 3. \dots \lambda$, j'ai démontré qu'il y a toujours $\frac{[\lambda]}{[-\lambda]}$.



$[-\lambda] = \frac{\lambda \pi}{\sin \lambda \pi}$: donc posant $n - 1 = -m$ ou $n = -m + 1$, pour avoir cete expression:

$$\frac{1 - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + \&c.}{1 - 2^{m+1} + 3^{m+1} - 4^{m+1} + 5^{m+1} - 6^{m+1} + \&c.} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (-m) (2^{m+1} - 1)}{(2^m - 1) \pi^{m+1}} \operatorname{cof.} \frac{(1-m)\pi}{2},$$

où puisque $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (-m) = [-m] \& [m] [-m] = \frac{m\pi}{\sin m\pi}$, nous aurons $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (-m) = \frac{m\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \sin m\pi} =$

$$\frac{\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \sin m\pi}. \text{ Ensuite on fait que } \operatorname{cof.} \frac{(1-m)\pi}{2} =$$

$\sin \frac{m\pi}{2}$, & par ces substitutions l'expression trouvée prendra cette

$$\text{forme: } \frac{2 (2^{m+1} - 1) \pi^m}{(2^m - 1) 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \sin m\pi} \sin \frac{m\pi}{2} = \frac{(2^{m+1} - 1) \pi^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) (2^m - 1) \operatorname{cof.} \frac{m\pi}{2}},$$

à cause de $\sin m\pi = 2 \sin \frac{m\pi}{2} \operatorname{cof.} \frac{m\pi}{2}$. Maintenant, nous n'a-

ons qu'à renverser l'équation trouvée en mettant en haut les dénominateurs & en bas les numérateurs, & nous obtiendrons cette équation

$$\frac{1 - 2^{m+1} + 3^{m+1} - 4^{m+1} + 5^{m+1} - 6^{m+1} + \&c.}{1 - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + \&c.} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) (2^m - 1)}{(2^{m+1} - 1) \pi^m} \operatorname{cof.} \frac{m\pi}{2},$$

qui étant la même que la supposée, on voit clairement que si la sup-

posée est vraie pour les cas où n est un nombre positif, elle le sera aussi, quand n est un nombre négatif, à cause de $m = -n + 1$.

14. Il se présente encore un cas bien remarquable en posant $n = \frac{1}{2}$, qui conduit à cette fraction

$$\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \&c.}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \&c.}$$

dont le numérateur & le dénominateur étant égaux, & partant la valeur $= 1$, il faut prouver que l'expression, qui en vertu de la conjecture lui est égale, savoir:

$$- \frac{1.2.3\dots(-\frac{1}{2})(\sqrt{2}-1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{\pi}} \cos. \frac{\pi}{4} = + \frac{[-\frac{1}{2}]\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{[-\frac{1}{2}]}{\sqrt{\pi}}$$

Or j'ai démontré autrefois, en examinant la progression hypergéométrique $1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, \&c.$ dont le terme général est $1.2.3\dots n = [n]$, que posant $n = \frac{1}{2}$, on a $[\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, & puisque $[\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}]$, il est évident que $[-\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, & partant notre expression devient effectivement $= 1$. Ce qui ne sauroit plus laisser aucun doute sur la vérité de notre conjecture, l'ayant démontrée non seulement pour tous les cas où l'exposant n est un nombre entier quelconque, soit négatif, soit positif, mais aussi pour le cas $n = \frac{1}{2}$. Pour les autres cas des nombres rompus, qu'on voudroit mettre au lieu de n , on ne sauroit prétendre une démonstration particulière, attendu que qu'on n'a encore découvert aucune méthode propre pour déterminer la somme d'une telle série $1 - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - \&c.$ lorsque l'exposant n est une fraction. Dans ces cas il faut se contenter d'approximations: or on verra aussi alors, que notre conjecture est d'accord avec la vérité.



15. Pour en faire un essai, soit $n = \frac{1}{2}$, & cette fraction

$$\frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \&c.}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{6\sqrt{6}} + \&c.}, \text{ à cause de}$$

$$1.2.3.\dots(n-1) = \left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \text{ \& col. } \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ doit}$$

être égale à cette quantité $\frac{2\sqrt{2} - 1}{2(2 - \sqrt{2})\pi} = \frac{3 + \sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}} = 0,4967738.$

Mais la série supérieure, en ajoutant les 9 premiers termes, donne

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{8} + \sqrt{9} =$$

1,9217396662,

d'où il faut retrancher la somme de tous les termes suivans à l'infini $\sqrt{10} - \sqrt{11} + \sqrt{12} - \sqrt{13} + \sqrt{14} - \&c.$ laquelle par le §. 7. est

$$\frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1(2^2-1)}{4} \cdot \frac{A}{\sqrt{10}} + \frac{1.1.3(2^4-1)}{4^3} \cdot \frac{B}{10^2\sqrt{10}} -$$

$$\frac{1.1.3.5.7}{4^5} (2^6-1) \cdot \frac{C}{10^4\sqrt{10}} + \frac{1.1.3.5.7.9.11}{4^7} (2^8-1) \frac{D}{10^6\sqrt{10}} \&c.$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2} \left(1 - \frac{1.3}{2} \cdot \frac{A}{10} + \frac{1.1.3.15}{2^5} \cdot \frac{B}{10^3} - \frac{1.1.3.5.7.63}{2^9} \cdot \frac{C}{10^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1.1.3.5.7.9.11.255}{2^{13}} \cdot \frac{D}{10^7} - \&c. \right)$$

Or ayant $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{28}$, $C = \frac{1}{48}$, $D = \frac{1}{58}$, $E = \frac{1}{33333}$, la valeur de cette expression résulte $= 0,48750774577 \cdot \sqrt{10}$, qui est à peu près $= 1,541610$, & partant la série supérieure $1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \sqrt{5} - \sqrt{6} + \&c. = 0,380129.$

Ensuite, pour la série inférieure, les 9 premiers termes donnent $0,7821470744$, d'où il faut retrancher la somme de tous les suivans,



qui est $= \frac{1}{20\sqrt{10}} \left(1 + \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{A}{10} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 15}{2^5} \cdot \frac{B}{10^3} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 63}{2^9} \cdot \frac{C}{10^5} - \&c. \right)$, & à peu près $= 0,01698880$,

d'où la somme de cette série infinie sera $= 0,765158$. Voyons donc si la première série divisée par celle-cy, ou bien cette fraction $\frac{0,380129}{0,765158}$, est égale à la valeur $0,4967738$; or la différence est si petite, ne montant qu'à deux cent-millièmes parties de l'unité, que l'on ne sauroit douter, que la chose ne soit vraie à la dernière rigueur.

16. Puisque donc notre conjecture est portée au plus haut degré de certitude, qu'il ne reste plus même aucun doute sur les cas où l'on met pour l'exposant n des fractions, mettons devant les yeux les cas, où n est une fraction de cette espèce $\frac{2i+1}{2}$, qui sont

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \&c.} &= + \frac{1(2\sqrt{2} - 1)}{2^1(2 - \sqrt{2})\pi}, \\ \frac{1 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^2\sqrt{2}} + \frac{1}{3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{4^2\sqrt{4}} + \&c.} &= + \frac{1 \cdot 3(4\sqrt{2} - 1)}{2^2(4 - \sqrt{2})\pi^2}, \\ \frac{1 - 2^2\sqrt{2} + 3^2\sqrt{3} - 4^2\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^3\sqrt{2}} + \frac{1}{3^3\sqrt{3}} - \frac{1}{4^3\sqrt{4}} + \&c.} &= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5(8\sqrt{2} - 1)}{2^3(8 - \sqrt{2})\pi^3}, \\ \frac{1 - 2^3\sqrt{2} + 3^3\sqrt{3} - 4^3\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^4\sqrt{2}} + \frac{1}{3^4\sqrt{3}} - \frac{1}{4^4\sqrt{4}} + \&c.} &= - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7(16\sqrt{2} - 1)}{2^4(16 - \sqrt{2})\pi^4}, \end{aligned}$$

$$\frac{1 - 2^4\sqrt{2} + 3^4\sqrt{3} - 4^4\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^5\sqrt{2}} + \frac{1}{3^5\sqrt{3}} - \frac{1}{4^5\sqrt{4}} + \&c.} = + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 (32\sqrt{2} - 1)}{2^5 (32 - \sqrt{2}) \pi^5},$$

$$\frac{1 - 2^5\sqrt{2} + 3^5\sqrt{3} - 4^5\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^6\sqrt{2}} + \frac{1}{3^6\sqrt{3}} - \frac{1}{4^6\sqrt{4}} + \&c.} = + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 (64\sqrt{2} - 1)}{2^6 (64 - \sqrt{2}) \pi^6},$$

$$\frac{1 - 2^6\sqrt{2} + 3^6\sqrt{3} - 4^6\sqrt{4} + \&c.}{1 - \frac{1}{2^7\sqrt{2}} + \frac{1}{3^7\sqrt{3}} - \frac{1}{4^7\sqrt{4}} + \&c.} = - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 (128\sqrt{2} - 1)}{2^7 (128 - \sqrt{2}) \pi^7},$$

&c.

où il faut remarquer que la fraction générale $\frac{2^\lambda \sqrt{2} - 1}{2^\lambda - \sqrt{2}}$, se réduit à

celle-cy $\frac{(2^{2\lambda} - 1) \sqrt{2} + 2^\lambda}{2^{2\lambda} - 2}$. Donc, de chaque paire de ces sé-

ries, dès qu'on a trouvé la somme de l'une, on en trouvera celle de l'autre par le moyen de la quadrature du cercle.

17. A l'égard des séries réciproques des puissances

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \&c.$$

j'ai déjà observé, que leurs sommes ne sauroient être assignées que lorsque l'exposant n est un nombre entier pair, & que pour les cas où n est un nombre entier impair, tous mes soins ont été jusqu'ici inutiles. Maintenant, ayant réduit la somme de ces séries réciproques à celle des directes, savoir à celle-cy en général

$$1 - 2^{n-1} + 3^{n-1} - 4^{n-1} + 5^{n-1} - 6^{n-1} + \&c.$$

on auroit pu s'attendre, que de là on trouveroit quelque route pour parvenir à ce but; mais il arrive malheureusement, que dans les cas



où n est un nombre impair, la somme de cette série directe évanouit, en sorte qu'on n'en sauroit rien conclure: or sans cet accident la formation desdites séries n'auroit aucune difficulté: car, posant $n = 2\lambda + 1$, en vertu de notre heureuse conjecture nous aurons:

$$1 - \frac{1}{2^{2\lambda+1}} + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} - \frac{1}{4^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} - \dots =$$

$$\frac{(2^{2\lambda} - 1)\pi^{2\lambda+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2\lambda(2^{2\lambda+1} - 1)} \cdot \frac{1 - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + 5^{2\lambda} - \dots}{\cos \frac{2\lambda+1}{2} \pi}$$

Or, dans le dernier membre de cette expression, tant le numérateur $1^{2\lambda} - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + 5^{2\lambda} - \dots$ que le dénominateur $\cos \frac{2\lambda+1}{2} \pi = -\sin \lambda\pi$, évanouit, en supposant λ un nombre entier. Il est bien vrai qu'on peut découvrir aisément la valeur d'une telle fraction, en substituant au lieu du numérateur & du dénominateur leurs différentiels, mais par ce moyen on ne gagnera pas grand' chose, comme je m'en vai faire voir.

18. Donc, conformément à cette méthode, le différentiel du numérateur étant

$$2d\lambda(1^{2\lambda}/1 - 2^{2\lambda}/2 + 3^{2\lambda}/3 - 4^{2\lambda}/4 + \dots)$$

& celui du dénominateur $= -\pi d\lambda \cos \lambda\pi$, nous aurons pour notre cas la somme exprimée en sorte

$$1 - \frac{1}{2^{2\lambda+1}} + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} - \frac{1}{4^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} - \dots =$$

$$\frac{2(2^{2\lambda} - 1)\pi^{2\lambda}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2\lambda(2^{2\lambda+1} - 1)\cos \lambda\pi} \cdot (1^{2\lambda}/1 - 2^{2\lambda}/2 + 3^{2\lambda}/3 - 4^{2\lambda}/4 + \dots)$$

d'où



d'où nous tirons, en substituant pour λ les nombres 1. 2. 3 &c. les formations suivantes :

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \&c. = - \frac{2.3.\pi^2(1/1 - 2^2/2 + 3^2/3 - 4^2/4 + \&c.)}{1.2.7}$$

$$1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \frac{1}{4^5} + \&c. = + \frac{2.15.\pi^4(1/1 - 2^4/2 + 3^4/3 - 4^4/4 + \&c.)}{1.2.3.4.31}$$

$$1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \&c. = - \frac{2.63.\pi^6(1/1 - 2^6/2 + 3^6/3 - 4^6/4 + \&c.)}{1.2.3...6.127}$$

$$1 - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{4^9} + \&c. = + \frac{2.255.\pi^8(1/1 - 2^8/2 + 3^8/3 - 4^8/4 + \&c.)}{1.2.3...8.511}$$

$$1 - \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} - \frac{1}{4^{11}} + \&c. = - \frac{2.1023.\pi^{10}(1/1 - 2^{10}/2 + 3^{10}/3 - 4^{10}/4 + \&c.)}{1.2.3...2047}$$

&c.

Il faudroit donc qu'on pût trouver les sommes des séries comprises dans cette forme :

$$1^{2\lambda}/1 - 2^{2\lambda}/2 + 3^{2\lambda}/3 - 4^{2\lambda}/4 + \&c.$$

Mais cette recherche est peut-être plus difficile que celle que nous avons en vue ; & je n'entrevois aucune méthode qui nous puisse conduire au but proposé.

19. Ces équations deviennent un peu plus simples en considérant que cette série $1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{9^m} + \&c.$ est égale à celle - cy

$$\frac{2^m - 1}{2(2^{m-1} - 1)} \left(1 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \&c. \right)$$

d'où nous tirons d'abord en général



$$1 + \frac{1}{3^{2\lambda+1}} + \frac{1}{5^{2\lambda+1}} + \frac{1}{7^{2\lambda+1}} + \frac{1}{9^{2\lambda+1}} + \&c. =$$

$$= \frac{\pi^{2\lambda}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2\lambda \cos \lambda\pi} (2^{2\lambda}/2 - 3^{2\lambda}/3 + 4^{2\lambda}/4 - 5^{2\lambda}/5 + \&c.)$$

& ensuite pour les cas particuliers:

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \&c. = + \frac{\pi^2 (2^2/2 - 3^2/3 + 4^2/4 - \&c.)}{1 \cdot 2}$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \&c. = - \frac{\pi^4 (2^4/2 - 3^4/3 + 4^4/4 - \&c.)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \&c. = + \frac{\pi^6 (2^6/2 - 3^6/3 + 4^6/4 - \&c.)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \&c. = - \frac{\pi^8 (2^8/2 - 3^8/3 + 4^8/4 - \&c.)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$$

&c.

Or ici il faut bien remarquer que la somme générale de ces deux derniers paragraphes n'est vraie que lorsque l'exposant λ est un nombre entier positif, puisqu'elle est fondée sur cette condition, que la somme de cette série :

$1 - 2^{2\lambda} + 3^{2\lambda} - 4^{2\lambda} + \&c.$ est zéro: donc, comme cela n'est plus vrai dans le cas $\lambda = 0$, on ne peut mettre pour λ que les nombres 1, 2, 3, 4, 5 &c. J'ajoute encore cette remarque de cette série $1/2 - 1/3 + 1/4 - 1/5 + \&c.$ la somme est $= \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}$, ce qui laisse quelque espérance de réussir enfin aussi dans les séries auxquelles j'ai été conduit ici.

20. De la même manière on peut comparer ensemble les sommes de ces deux séries infinies

$$1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \&c. \quad \& \quad 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \&c.$$

& une conjecture semblable nous fournit ce *théorème*

$$\frac{1 - 3^{n-1} + 5^{n-1} - 7^{n-1} + \&c.}{1 - 3^n + 5^n - 7^n + \&c.} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot 2^n}{\pi^n} \sin \frac{n\pi}{2},$$

où il arrive que, dans les cas où n est un nombre entier positif pair, la somme de la série supérieure évanouit; & dans ces cas aussi le sinus de l'angle $\frac{n\pi}{2}$, devient zéro. Donc, posant $n = 2\lambda$, nous aurons:

$$1 - \frac{1}{3^{2\lambda}} + \frac{1}{5^{2\lambda}} - \frac{1}{7^{2\lambda}} + \&c. = \frac{-\pi^{2\lambda-1} (3^{2\lambda-1}/3 - 5^{2\lambda-1}/5 + 7^{2\lambda-1}/7 - \&c.)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2\lambda - 1) 2^{2\lambda-1} \cos \lambda\pi},$$

prenant pour λ un nombre entier positif quelconque. De là nous tirons les sommations suivantes:

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \&c. = + \frac{\pi (3/3 - 5/5 + 7/7 - \&c.)}{1 \cdot 2^1},$$

$$1 - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{7^4} + \&c. = - \frac{\pi^3 (3^3/3 - 5^3/5 + 7^3/7 - \&c.)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3},$$

$$1 - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{7^6} + \&c. = + \frac{\pi^5 (3^5/3 - 5^5/5 + 7^5/7 - \&c.)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5},$$



$$1 - \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} - \frac{1}{7^8} + \&c. = - \frac{\pi^7 (3^7/3 - 5^7/5 + 7^7/7 - \&c.)}{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 2^7},$$

$$1 - \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} - \frac{1}{7^{10}} + \&c. = + \frac{\pi^9 (3^9/3 - 5^9/5 + 7^9/7 - \&c.)}{1. 2. 3. \dots 9. 2^9}.$$

Cette dernière conjecture renferme une expression plus simple que la précédente; donc, puisqu'elle est également certaine, il y a à espérer qu'on travaillera avec plus de succès à en chercher une démonstration parfaite, qui ne manquera pas de répandre beaucoup de lumière sur quantité d'autres recherches de cette nature.

